

两类 Liénard 系统的小振幅极限环*

熊峰¹, 黄文韬^{1,2}

(1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004;
2. 桂林航天工业学院理学部, 广西 桂林 541004)

摘要: 研究一类 $m = 6, n = 8$ 和一类 $m = 8, n = 6$ 的 Liénard 系统在原点邻域内的极限环数目问题, 证明了这两个系统在原点充分小邻域内分别能产生 9 个和 8 个极限环, 首次给出了 $\hat{H}(6,8)$ 和 $\hat{H}(8,6)$ 的一个下界估计, 即 $\hat{H}(6,8) \geq 9, \hat{H}(8,6) \geq 8$ 。

关键词: Liénard 系统; 奇点量; 细焦点; 极限环

中图分类号: O175.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2017) 03-0066-05

Small amplitude limit cycles for two classes of Liénard systems

XIONG Feng¹, HUANG Wentao^{1,2}

(1. School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China;

2. School of Science, Guilin University of Aerospace Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: The number of limit cycles for classes of Liénard systems ($m = 6, n = 8$) and ($m = 8, n = 6$) in the neighborhood of the origin is studied. It is proved that the two systems can generate 9 and 8 limit cycles in a sufficiently small neighborhood of the origin, respectively. It is the first time that lower bound estimations of $\hat{H}(6,8)$ and $\hat{H}(8,6)$ are obtained, namely $\hat{H}(6,8) \geq 9, \hat{H}(8,6) \geq 8$.

Key words: Liénard system; singular point; fine focus; limit cycles

Liénard 系统是微分方程中一类经典的系统。Liénard 方程最早被发现于 20 世纪 20 年代。1928 年, 法国数学家 Liénard 将其一般形式推广总结出来, 有如下二阶微分方程形式:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (1)$$

它有几类等价的微分方程组, 其中一类有如下形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + F(x) \\ \frac{dy}{dt} = g(x) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(s) ds$ 。因其在各领域的实际意义, 一直以来, 关于 Liénard 方程的各类问题均是微分方程理论研究的热点。寻找 Liénard 方程原点邻域内极限环个数问题是一个有挑战性的问题, 吸引了众多数学工作者对其进行研究^[1-8]。

记 $\hat{H}(m, n)$ 为 Liénard 方程原点可分支出小振幅极限环的最大个数 (m, n 为正整数, 分别表示方程 (2) 中 $f(x), g(x)$ 的次数)。Christopher 与 Lynch^[1]证明了对所有整数 m , 有 $\hat{H}(2, m) = \hat{H}(m,$

* 收稿日期: 2016-08-05

基金项目: 国家自然科学基金 (11261013, 11361017); 广西省自然科学基金重点项目 (2016GXNSFDA380031)

作者简介: 熊峰 (1990 年生), 男; 研究方向: 微分方程定性理论及其应用; E-mail: 1073620114@qq.com

通信作者: 黄文韬 (1966 年生), 男; 研究方向: 微分方程定性理论及其应用; E-mail: huangwentao@163.com

2) = [(2m + 1)/3], 同时他们证明了当 2 ≤ m ≤ 50, $\hat{H}(3, m) = \hat{H}(m, 3) = 2[3(m + 2)/8]$; 文 [2] 对 n = 4 的情形进行研究, 得到 $\hat{H}(m, 4) = m(m = 10, 11, 12, 13)$ 的结论, 同时根据当时的研究情况给出了关于 $\hat{H}(m, n)$ 值的一个新表。在这个表中, 我们发现, 当 m = 6, n = 8 和 m = 8, n = 6 时, $\hat{H}(m, n)$ 的值还没有进行研究。本文考虑如下两类系统原点邻域的极限环问题:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_6x^6 + x^7 - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + b_3x^3 + x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 + x^7 + x^8 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_6x^6 + a_7x^7 + x^8 + x^9 - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + b_3x^3 + x^4 + b_5x^5 + x^6 \end{cases} \quad (4)$$

其中 $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_3, b_5, b_6 \in \mathbf{R}$, 下面给出本文研究中需要的一些基础知识。

考虑如下实多项式系统

引理 1^[9-10]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i+j=k} x^i y^j, \\ \frac{dy}{dt} = x + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i+j=k} x^i y^j \end{cases} \quad (5)$$

通过变换

$$\begin{aligned} z &= \xi + \eta i, & w &= \xi - \eta i, \\ T &= it, & i &= \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

系统 (5) 被转化成下面的复系统

$$\begin{cases} \frac{dz}{dT} = z + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta, \\ \frac{dw}{dT} = -w - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} b_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta \end{cases} \quad (7)$$

其中 z, w, T 是复变量, 对于系统 (7) 可以逐项确定形式级数

$$M(z, w) = \sum_{\alpha+\beta=0}^{\infty} c_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta \quad (8)$$

使得 $\frac{\partial(MZ)}{\partial z} - \frac{\partial(MW)}{\partial w} = \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)\mu_m (zw)^k$, 这里 $c_{00} = 1, \forall c_{kk} \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \dots, m$ 。其中 $c_{\alpha,\beta}, \mu_m$ 可由以下递推公式确定:

$$c_{0,0} = 1$$

when $(\alpha = \beta > 0)\alpha < 0, \beta < 0, c_{\alpha,\beta} = 0$
else

$$c_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_{k+j=3}^{\alpha+\beta+2} [(\alpha+1)a_{k,j-1} - (\beta+1)b_{j,k-1}] c_{\alpha-k+1, \beta-j+1} \quad (9)$$

$$\mu_m = \sum_{k+j=3}^{2m+2} (a_{k,j-1} - b_{j,k-1}) c_{m-k+1, m-j+1} \quad (10)$$

定义 1 引理 1 中的 μ_m 称为系统 (7) 原点的第 m 个奇点量。若

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{k-1} = 0, \mu_k \neq 0$$

则称原点为系统的 k 阶细奇点, 如果所有的 $\mu_k = 0$, 则称原点为 (7) 的中心。归纳文 [3-5] 等的结论有如下结果。

引理 2 对系统 (5), 其伴随复系统 (7) 原点的奇点量 $\mu_i (i = 1, \dots, k)$ 有 k 个独立的参数 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, 若 $\theta = \theta_0$ 时, 系统 (7) 原点为 k 阶细奇点 (相应地系统 (5) 的原点为 k 阶细焦点), 且雅克比行列式满足

$$J = \left| \frac{\partial(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1})}{\partial(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1})} \right|_{\theta=\theta_0} \neq 0$$

则系统 (5) 在原点的充分小邻域内可扰动出 k 个小振幅极限环。

1 系统 (3) 的奇点量与极限环

通过变换 (6), 系统 (3) 转化为其伴随复系统:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dT} &= -\frac{1}{4}ia_2w^2 + \left(-\frac{ia_3}{8} + \frac{b_3}{8}\right)w^3 + \\ &\left(\frac{1}{16} - \frac{ia_4}{16}\right)w^4 + \left(-\frac{ia_5}{32} + \frac{b_5}{32}\right)w^5 + \\ &\left(-\frac{ia_6}{64} + \frac{b_6}{64}\right)w^6 + \left(\frac{1}{128} - \frac{i}{128}\right)w^7 + \\ &\left(-\frac{w^8}{256} - \frac{1}{2}ia_2wz\right) + \left(-\frac{3ia_3}{8} + \frac{3b_3}{8}\right)w^2z + \\ &\left(\frac{1}{4} - \frac{ia_4}{4}\right)w^3z + \left(-\frac{ia_5}{32} + \frac{b_5}{32}\right)w^4z + \\ &\left(1 + \left(-\frac{3ia_6}{32} + \frac{3b_6}{32}\right)w^5 + \left(\frac{7}{128} - \frac{7i}{128}\right)w^6 + \frac{w^7}{32}\right)z + \\ &\left(-\frac{3ia_3}{8} + \frac{3b_3}{8}\right)wz^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{3ia_4}{8}\right)w^2z^2 + \\ &\left(-\frac{5ia_5}{16} + \frac{5b_5}{16}\right)w^3z^2 + \left(-\frac{ia_2}{4} - \frac{15ia_6}{64} + \frac{15b_6}{64}\right)w^4 + \\ &\left(\frac{21}{128} - \frac{21i}{128}\right)w^5 + \frac{7w^6}{64}z^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{ia_4}{4}\right)wz^3 + \\ &\left(-\frac{5ia_5}{16} + \frac{5b_5}{16}\right)w^2z^3 + \left(-\frac{ia_3}{8} + \frac{b_3}{8} + \left(-\frac{5ia_6}{16} + \frac{5b_6}{16}\right)w^3\right) + \\ &\left(\frac{35}{128} - \frac{35i}{128}\right)w^4 + \frac{7w^5}{32}z^3 + \left(-\frac{5ia_5}{32} + \frac{5b_5}{32}\right)wz^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{16} - \frac{ia_4}{16} + \left(-\frac{15ia_6}{64} + \frac{15b_6}{64} \right) w^2 + \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{35}{128} - \frac{35i}{128} \right) w^3 + \frac{35w^4}{128} \right) z^4 + \\
& \quad \left(-\frac{ia_5}{32} + \frac{b_5}{32} + \left(-\frac{3a_6}{32} + \frac{3b_6}{32} \right) \right) w + \\
& \quad \left(\frac{21}{128} - \frac{21i}{128} w^2 + \frac{7w^3}{32} \right) z^5 + \\
& \quad \left(-\frac{ia_6}{64} + \frac{b_6}{64} + \left(\frac{7}{128} - \frac{7i}{128} \right) w + \frac{7w^2}{64} \right) z^6 + \\
& \quad \left(\frac{1}{128} - \frac{i}{128} + \frac{w}{32} \right) z^7 + \frac{z^8}{256}, \\
\frac{dw}{dT} = & - \left[w + \frac{1}{4} ia_2 w^2 + \left(\frac{ia_3}{8} + \frac{b_3}{8} \right) w^3 + \right. \\
& \left(\frac{1}{16} + \frac{ia_4}{16} \right) w^4 + \left(\frac{ia_5}{32} + \frac{b_5}{32} \right) w^5 + \left(\frac{ia_6}{64} + \frac{b_6}{64} \right) w^6 + \\
& \quad \left(\frac{1}{128} + \frac{i}{128} \right) w^7 + \frac{w^8}{256} + \frac{1}{2} ia_2 w z + \\
& \quad \left(\frac{3ia_3}{8} + \frac{3b_3}{8} \right) w^2 z + \left(\frac{1}{4} + \frac{ia_4}{4} \right) w^3 z + \\
& \quad \left(\frac{5ia_5}{32} + \frac{5b_5}{32} \right) w^4 z + \left(\left(\frac{3ia_6}{32} + \frac{3b_6}{32} \right) w^5 + \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{7}{128} + \frac{7i}{128} \right) w^6 + \frac{7}{32} w^7 \right) z + \left(\frac{3ia_3}{8} + \frac{3b_3}{8} \right) w z^2 + \\
& \quad \left(\frac{3}{8} + \frac{3ia_4}{8} \right) w^2 z^2 + \left(\frac{5ia_5}{16} + \frac{5b_5}{16} \right) w^3 z^2 + \\
& \quad \left(\frac{ia_2}{4} + \left(\frac{15ia_6}{64} + \frac{15b_6}{64} \right) w^4 + \left(\frac{21}{128} + \frac{21i}{128} \right) w^5 + \frac{7w^6}{64} \right) z^2 + \\
& \quad \left(\frac{1}{4} + \frac{ia_4}{4} \right) w z^3 + \left(\frac{5ia_5}{16} + \frac{5b_5}{16} \right) w^2 z^3 + \left(\frac{ia_3}{8} + \frac{b_3}{8} + \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{5ia_6}{16} + \frac{5b_6}{16} \right) w^3 + \left(\frac{35i}{128} + \frac{35}{128} \right) w^4 + \frac{7w^5}{32} \right) z^3 + \\
& \quad \left(\frac{5ia_5}{32} + \frac{5b_5}{32} \right) w z^4 + \left(\frac{1}{16} + \frac{ia_4}{16} + \left(\frac{15ia_6}{64} + \frac{15b_6}{64} \right) w^2 + \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{35}{128} + \frac{35i}{128} \right) w^3 + \frac{35w^4}{128} \right) z^4 + \left(\frac{ia_5}{32} + \frac{b_5}{32} + \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{3ia_6}{32} + \frac{3b_6}{32} \right) w + \left(\frac{21}{128} + \frac{21i}{128} \right) w^2 + \frac{7w^3}{32} \right) z^5 + \\
& \quad \left(\frac{ia_6}{64} + \frac{b_6}{64} + \left(\frac{7}{128} + \frac{7i}{128} \right) w + \frac{7w^2}{64} \right) z^6 + \\
& \quad \left. \left. \left(\left(\frac{1}{128} + \frac{i}{128} \right) + \frac{w}{32} \right) z^7 + \frac{z^8}{256} \right] \right. \quad (11)
\end{aligned}$$

根据引理 1 的递推公式, 经过仔细计算, 得系统 (11) 原点的前九阶奇点量如下:

$$\mu_1 = -\frac{3ia_3}{4}; \mu_2 = \frac{1}{8}i(2a_2 - 5a_5);$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{64}i(35 - 28a_4 + 14a_2b_3 - 10a_2b_6);$$

$$\mu_4 = \frac{iF_1}{4 \ 480}; \mu_5 = -\frac{1}{376 \ 320}11iF_2;$$

$$\mu_6 = -\frac{1}{6 \ 773 \ 760}143iF_3; \mu_7 = -\frac{2 \ 431iF_4}{7 \ 168 \ 000};$$

$$\mu_8 = -\frac{1}{58 \ 525 \ 286 \ 400}143iF_5;$$

$$\mu_9 = \frac{1}{147 \ 483 \ 721 \ 728 \ 000}143iF_6$$

其中

$$F_1 = 490a_2 + 2 \ 646a_6 - 2 \ 205b_3 - 8 \ 82a_2b_5 + 1 \ 575b_6 + 630a_2b_3b_6 - 450a_2b_6^2,$$

$$F_2 = -8 \ 575 + 6 \ 174a_2 - 3 \ 430a_2b_3 + 15 \ 435b_5 + 4 \ 900a_2b_6 - 11 \ 025b_3b_6 - 4 \ 410a_2b_5b_6 + 7 \ 875b_6^2 + 3 \ 150a_2b_3b_6^2 - 2 \ 250a_2b_6^3,$$

$$F_3 = 27 \ 783 + 2 \ 450a_2 - 11 \ 025b_3 - 4 \ 410a_2b_5 - 7 \ 875b_6 - 2 \ 268a_2b_6 + 3 \ 150a_2b_3b_6 - 2 \ 250a_2b_6^2,$$

$$F_4 = -1 \ 323 - 350a_2 + 210a_2b_5 + 108a_2b_6,$$

$$F_5 = -15 \ 273 \ 009 \ 675a_2 - 2 \ 693 \ 652 \ 500a_2^2 - 969 \ 714 \ 900a_2^3 + 53 \ 870 \ 500a_2^3b_3 - 76 \ 919 \ 220b_5 + 138 \ 454 \ 596b_6 + 5 \ 610 \ 493 \ 350a_2^2b_6 - 384 \ 807 \ 500a_2^3b_6 - 11 \ 302 \ 416a_2b_6^2 - 356 \ 221 \ 800a_2^3b_6^2,$$

$$F_6 = 112 \ 185 \ 067 \ 078 \ 287 + 81 \ 668 \ 445 \ 324 \ 984a_2 + 62 \ 101 \ 108 \ 925 \ 100a_2^2 - 249 \ 620 \ 188 \ 954 \ 8871a_2^3 - 441 \ 032 \ 187 \ 046 \ 500a_2^4 - 1 \ 587 \ 715 \ 873 \ 367a_2^5 - 140 \ 531 \ 419 \ 400b_3 - 29 \ 944 \ 901 \ 731 \ 500a_2^2b_3 - 11 \ 108 \ 364 \ 646 \ 680a_2^3b_3 + 88 \ 206 \ 437 \ 409 \ 300a_2^5b_3 + 3 \ 885 \ 060 \ 501 \ 000a_2^3b_3^2 + 1 \ 084 \ 561 \ 002 \ 000b_6 - 14 \ 397 \ 604 \ 666 \ 202a_2b_6 - 19 \ 737 \ 170 \ 414 \ 388a_2^2b_6 - 2 \ 630 \ 174 \ 538 \ 600a_2^3b_6 + 918 \ 007 \ 041 \ 019 \ 710a_2^4b_6 - 63 \ 004 \ 598 \ 149 \ 500a_2^5b_6 - 602 \ 277 \ 492 \ 600b_5b_6 + 1 \ 084 \ 099 \ 486 \ 680b_6^2 + 40 \ 561 \ 130 \ 181 \ 600a_2^2b_6^2 - 529 \ 468 \ 177 \ 896a_2^3b_6^2 - 583 \ 242 \ 565 \ 726 \ 800a_2^5b_6^2 - 88 \ 497 \ 917 \ 280a_2b_6^3 - 2 \ 412 \ 976 \ 586 \ 400a_2^3b_6^3$$

定理 1 对于系统 (3) 或者系统 (11), 原点均不是系统的中心。

证明 若原点是系统 (11) 的中心, 则至少满足 $\mu_i = 0 (i = 1, \dots, 9)$ 成立。用 Mathematica 软件可算得 μ_i 的 Groebner 基, 有

$$\text{GroebnerBasis}[(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_9), (a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_3, b_5, b_6)] = 1$$

从而得到 $\mu_i (i = 1, \dots, 9)$ 无公共实根, 则 μ_i 不可能同时为 0。证明完毕。

由奇点量表达式及定理 1, 经过仔细计算, 有:

定理 2 系统 (11) 的原点是 9 阶细奇点 (相应的系统 (3) 的原点是 9 阶细焦点) 当且仅当下列条件成立:

$$\begin{aligned}
 a_3 &= 0, a_5 = \frac{2a_2}{5}, \\
 a_4 &= \frac{1}{28}(35 + 14a_2b_3 - 10a_2b_6), \\
 F_j &= 0, \quad j = 1, \dots, 5 \quad (12)
 \end{aligned}$$

为了方便应用, 取条件 (12) 的一组近似解如下:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -8.687\ 902\ 695\ 280\ 310\ 386\ 372\ 535\ 561 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -267\ 497\ 861\ 887\ 667\ 656\ 914\ 8\dots \\
 a_3 &= 0 \\
 a_4 &= -7.819\ 112\ 425\ 752\ 279\ 347\ 735\ 282\ 005 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -140\ 748\ 075\ 698\ 900\ 891\ 223\ 4\dots \\
 a_5 &= -3.475\ 161\ 078\ 112\ 124\ 154\ 549\ 014\ 224 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -506\ 999\ 144\ 755\ 067\ 062\ 765\ 9\dots \\
 a_6 &= 2.609\ 695\ 557\ 098\ 913\ 111\ 090\ 399\ 849 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -304\ 541\ 527\ 966\ 817\ 539\ 057\ 8\dots \quad (13) \\
 b_3 &= 2.332\ 203\ 415\ 494\ 509\ 727\ 338\ 816\ 257\ 094 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -152\ 243\ 605\ 177\ 452\ 566\ 5\dots \\
 b_5 &= 0.765\ 518\ 605\ 288\ 184\ 783\ 012\ 543\ 178\ 560 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -337\ 250\ 998\ 721\ 644\ 575\ 5\dots \\
 b_6 &= 0.342\ 225\ 757\ 741\ 530\ 933\ 853\ 094\ 928\ 710 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -726\ 629\ 724\ 412\ 789\ 848\ 47\dots
 \end{aligned}$$

定理 3 对于系统 (3), 当系数满足条件 (12) 时, 通过微扰在原点邻域可分支出九个极限环。

证明 由定理 2 知, 原点是系统 (3) 的 9 阶细焦点。将系统 (11) 中奇点量表达式与式 (13) 代入雅克比行列式有:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \left| \frac{\partial(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8)}{\partial(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_3, b_5, b_6)} \right|_{(13)} = \\
 &0.007\ 957\ 122\ 583\ 684\ 067\ 743\ 343\ 108 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -392\ 562\ 154\ 328\ 468\ 624\ i \neq 0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

由引理 2 知, 系统 (3) 在原点的充分小邻域可分支出 9 个极限环。

2 系统 (4) 原点处的极限环

通过变换 $x = \frac{z+w}{2}, y = \frac{i(w-z)}{2}, t = iT, i =$

$\sqrt{-1}$, 将系统 (4) 转化为其伴随复系统, 系统表

达式太长, 这里不再列出。

对复系统原点的奇点量进行计算, 根据引理 1, 可算得复系统原点的前八阶奇点量。

定理 4 对于系统 (4) 的伴随复系统, 原点的前八阶奇点量为:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= -\frac{3ia_3}{4}, \mu_2 = \frac{5ia_5}{8}, \mu_3 = \frac{7}{64}i(4a_4 - 5a_7), \\
 \mu_4 &= -\frac{9}{640}i(35 - 20a_4 - 42a_6 + 28a_4b_3), \\
 \mu_5 &= \frac{33iF_1}{17\ 920}, \mu_6 = -\frac{426i(-200 + 56a_4 + 175b_5)}{179\ 200}, \\
 \mu_7 &= \frac{7\ 293iF_2}{179\ 200}, \mu_8 = -\frac{46\ 180iF_3}{688\ 128}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 567 - 100a_4 - 245b_3 + 140a_4b_3 - 196a_4b_5, \\
 F_2 &= -262 + 70b_3 + 200b_5 - 175b_5^2, \\
 F_3 &= 6 - 8b_5 + 7b_5^2
 \end{aligned}$$

与前述一致的讨论, 我们有

定理 5 系统 (4) 的伴随复系统原点是 8 阶细奇点 (相应的系统 (4) 是 8 阶细焦点), 当且仅当下列条件成立:

$$\begin{aligned}
 a_3 &= a_5 = 0, a_7 = \frac{4a_4}{5}, \\
 a_6 &= \frac{1}{42}(35 - 20a_4 + 28a_4b_3), \\
 a_4 &= -\frac{25}{56}(-8 + 7b_5), F_j = 0 (j = 1, 2) \quad (15)
 \end{aligned}$$

为了方便应用, 取 (15) 式的一组近似解如下

$$\begin{aligned}
 a_3 &= 0, \\
 a_4 &= 1.066\ 199\ 745\ 897\ 643\ 024\ 480\ 300\ 234 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -879\ 325\ 174\ 247\ 617\ 416\ 339\ 2\dots \\
 a_5 &= 0, \\
 a_6 &= 2.499\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -894\ 591\ 005\ 342\ 125\ 416\ 194\dots \\
 a_7 &= 0.852\ 959\ 796\ 718\ 114\ 419\ 584\ 240\ 136 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -842\ 496\ 399\ 959\ 665\ 416\ 154\ 5\dots \quad (16) \\
 b_3 &= 3.059\ 062\ 112\ 534\ 832\ 064\ 433\ 729\ 022 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -782\ 908\ 032\ 703\ 145\ 369\ 381\ 4\dots \\
 b_5 &= 0.801\ 673\ 224\ 169\ 897\ 089\ 309\ 161\ 039 \rightarrow \\
 &\quad \leftarrow -794\ 232\ 564\ 336\ 279\ 331\ 615\ 5\dots
 \end{aligned}$$

定理 6 对于系统 (4), 当系数满足式 (16) 时, 通过微扰在原点邻域可分支出八个极限环。

证明 由定理 5 知当式 (16) 成立时, 原点是系统 (4) 的 8 阶细焦点, 将式 (16) 以及定理 5 中的奇点量表达式代入雅克比行列式

$$J_2 = \left| \frac{\partial(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7)}{\partial(a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_3, b_5)} \right|_{(15)} =$$

$$0.007\ 957\ 122\ 583\ 684\ 067\ 743\ 343\ 102 \rightarrow$$

$$\leftarrow 619\ 368\ 852\ 012\ 419\ 584\ 579\ 936\ i \neq 0$$

(17)

由引理 2 知, 系统 (4) 在原点邻域可分支出 8 个极限环。

参考文献:

- [1] CHRISTOPHER C, LYNCH S. Small-amplitude limit cycle bifurcations for Lienard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces [J]. *Nonlinearity*, 1999, 12(4): 1099 – 1112.
- [2] YU P, HAN M. Limit cycles in generalized Lienard systems [J]. *Chaos Solitons Fractal*, 2006, 30(5): 1048 – 1068.
- [3] YU P, HAN M. Twelve limit cycles in a cubic case of the 16th Hilbert problem [J]. *Int J Bifurcation Chaos*, 2005, 15(7): 2191 – 2205.
- [4] LI J, LIU Y. New results on the study of Z_q -Equivariant planar polynomial vector fields [J]. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 2010, 9(1): 167 – 219.
- [5] YU P, CORLESS R. Symbolic computation of limit cycles associated with Hilbert's 16th problem [J]. *Comm Non Sci Num Simu*, 2009, 14(12): 4041 – 4056.
- [6] 陈树辉, 黄武林, 徐兆. Liénard 方程半稳定极限环的计算[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 1998, 37(6): 5 – 9.
- CHEN S H, HUANG W L, XU Z. Calculation of semi-stable limit cycles of Liénard equation [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 1998, 37(6): 5 – 9.
- [7] 李时敏. 一类不连续广义 Liénard 微分系统的极限环分支[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2015, 54(5): 15 – 18.
- LI S M. Bifurcation of limit cycles for a class of discontinuous generalized liénard differential system [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2015, 54(5): 15 – 18.
- [8] 胡军胜. 一类三次 Liénard 方程的极限环分析[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2000, 39(S3): 18 – 20.
- HU J S. Limit cycles analysis to a class of cubic Liénard equations [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2000, 39(S3): 18 – 20.
- [9] 刘一戎, 陈海波. 奇点量公式的机器推导与一类三次系统的前 10 个鞍点量[J]. *应用数学学报*, 2002, 25(2): 295 – 302.
- LIU Y R, CHEN H B. Formulas of singular point quantities and the first 10 saddle quantities for a class of cubic system [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2002, 25(2): 295 – 302.
- [10] 刘一戎, 李继彬. 论复自治微分系统的奇点量[J]. *中国科学(A 辑)*, 1989(3): 245 – 255.
- LIU Y R, LI J B. Theory of values of singular point in complex autonomous differential systems [J]. *Science in China (Series A)*, 1989(3): 245 – 255.